第27卷 第3期
2010年06月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 27 No. 3
June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0487-09

压电介质夹杂功能梯度压电带界面双裂纹反平面问题*

周小玲, 李 星†

(宁夏大学数学计算机学院，银川 750021)

摘 要: 利用积分方程方法，本文研究了夹在两个均匀压电半空间的功能梯度压电带界面共线双裂纹的反平面问题。在电渗透型边界条件下，通过Fourier余弦变换将所考虑的问题化为一对偶积分方程，再用Copson方法将该对偶积分方程转化为Fredholm方程进行数值求解，从而给出了裂纹尖端的应力强度因子，电位移强度因子的表达式。分析了裂纹长度，功能梯度非均匀参数以及材料的几何尺寸等对应力强度因子的影响。

关键词: 功能梯度压电带；渗透型裂纹；Fourier变换；Copson方法；对偶积分方程；应力强度因子

分类号: **AMS**(2000) 45E05 **中图分类号**: O174.5 **文献标识码**: A

1 引言

对于压电介质的断裂力学问题的研究较充分[1-5]，但是由于压电材料的本质脆性，导致这种材料的应用受到了极大的限制，而功能梯度压电材料[6,7]较好地克服了压电材料的这一弊端，极大地提高了元件的可靠性。工程中需要将不同的功能梯度压电材料拼接起来使用，所以有必要对此类构件进行研究。然而在拼接界面上极易产生裂纹并扩展，此类问题的研究较多[8-10]。Zhou等[9,10]运用Schmidt方法求解了两个半无限大压电压磁复合材料的界面含有两个共线界面裂纹的静态问题以及动态问题。而运用Copson方法研究两种不同的功能梯度压电条的界面含有共线双裂纹拼接到两个半无限大压电材料上的反平面问题还未见报道。

2 问题描述

考虑如图1所示的模型，为方便，将功能梯度压电带的上下两部分区域分别用角码1和2表示，均匀压电材料上下区域分别用角码3和4表示。功能梯度压电材料本构方程为

$$\tau_{zx}^{(k)}=c_{44}^{(k)}(y)\frac{\partial w_k}{\partial x}+e_{15}^{(k)}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial x},\quad \tau_{zy}^{(k)}=c_{44}^{(k)}(y)\frac{\partial w_k}{\partial y}+e_{15}^{(k)}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial y},\tag{1}$$

$$D_x^{(k)}=e_{15}^{(k)}(y)\frac{\partial w_k}{\partial x}-\varepsilon_{11}^{(k)}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial x},\quad D_y^{(k)}=e_{15}^{(k)}(y)\frac{\partial w_k}{\partial y}-\varepsilon_{11}^{(k)}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial y},\tag{2}$$

其中$k=1,2,3,4$，当$k=1,2$时，假设这些材料系数沿y方向按指数函数分布，即

$$c_{44}^{(k)}(y)=c_{440}\mathrm{e}^{2\beta_k y},\quad e_{15}^{(k)}(y)=e_{150}\mathrm{e}^{2\beta_k y},\quad \varepsilon_{11}^{(k)}(y)=\varepsilon_{110}\mathrm{e}^{2\beta_k y},\tag{3}$$

收稿日期: 2008-02-18. **作者简介**: 周小玲(1979年6月生)，女，硕士. 研究方向：复分析及其在力学中的应用.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10962008)；973计划前期研究专项(2008CB617613).
†**通讯作者**: 李星 E-mail: li_ x@nxu.edu.cn

这里 c_{440}, ε_{110}, e_{150} 为 $y=0$ 平面处的压电材料常数，β_k 为梯度参数。而当 $k=3,4$ 时，这些材料常数为

$$c_{44}^{(k)}(y)=c_{440}\mathrm{e}^{\pm 2\beta_j h_j},\quad e_{15}^{(k)}(y)=e_{150}\mathrm{e}^{\pm 2\beta_j h_j},\quad \varepsilon_{11}^{(k)}(y)=\varepsilon_{110}\mathrm{e}^{\pm 2\beta_j h_j},\tag{4}$$

其中，当 $k=3$ 时取正号且 $j=1$，当 $k=4$ 时取负号且 $j=2$，而 h_1 和 h_2 是表示到有限边界的距离。

将 (3)-(4) 式代入 (1)-(2) 式，得到功能梯度压电材料的控制方程

$$\nabla^2 w_k+2\beta_k\frac{\partial w_k}{\partial y}=0,\quad \nabla^2\psi_k+2\beta_k\frac{\partial\psi_k}{\partial y}=0,\tag{5}$$

这里 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 为 Laplace 算子，且有关系式

$$\psi_k(x,y)=\phi_k(x,y)-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}w_k(x,y),\quad k=1,2.$$

均匀压电材料的控制方程

$$c_{440}\nabla^2 w_i+e_{150}\nabla^2\phi_i=0,\quad e_{150}\nabla^2 w_i-\varepsilon_{110}\nabla^2\phi_i=0,\quad i=3,4.\tag{6}$$

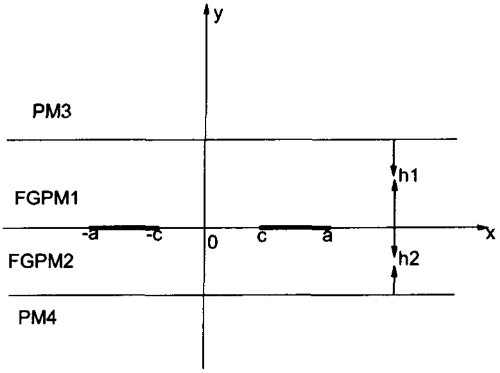

图 1: 夹在两压电半空间的两不同功能梯度压电带界面双裂纹的几何模型

3 电渗透型边界条件的提出

(i) 对称条件

$$w_1(x,0^+)=w_2(x,0^-),\quad \tau_{yz}^{(1)}(x,0^+)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0^-),$$

$$\phi_1(x,0^+)=\phi_2(x,0^-),\quad D_y^{(1)}(x,0^+)=D_y^{(2)}(x,0^-),\quad |x|>a,\quad |x|<c.\tag{7}$$

(ii) 裂纹面条件

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0^+)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0^-)=-\tau_0,\quad \phi_1(x,0^+)=\phi_2(x,0^-),$$

$$D_y^{(1)}(x,0^+)=D_y^{(2)}(x,0^-),\quad c\leqslant|x|\leqslant a.\tag{8}$$

(iii) 沿着界面的连续性条件

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,h_1^-)=\tau_{yz}^{(3)}(x,h_1{}^+),\quad D_y^{(1)}(x,h_1^-)=D_y^{(3)}(x,h_1{}^-),\quad w_1(x,h_1^-)=w_3(x,h_1^+),$$
$$\tau_{yz}^{(2)}(x,-h_2^+)=\tau_{yz}^{(4)}(x,-h_2{}^-),\quad D_y^{(2)}(x,-h_2^+)=D_y^{(4)}(x,-h_2{}^+),$$
$$w_2(x,-h_2^+)=w_4(x,-h_2^-),\quad |x|\leqslant\infty. \tag{9}$$

考虑到模型的对称性，只需研究$x>0$的部分即可。

对于式(8),(9)，取关于x的Fourier余弦变换，再利用反演变换得到位移$w_i(x,y)$, $i=1,2,3,4$，与电势$\phi_1(x,y)$, $i=1,2,3,4$，的形式解，如

$$w_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[A_1(s)\mathrm{e}^{p_1y}+B_1(s)\mathrm{e}^{p_2y}\right]\cos(sx)\mathrm{d}s, \tag{10}$$

$$\phi_1(x,y)=\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}w_1(x,y)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[C_1(s)\mathrm{e}^{p_1y}+D_1(s)\mathrm{e}^{p_2y}\right]\cos(sx)\mathrm{d}s, \tag{11}$$

$$w_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[A_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_1y}+B_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2y}\right]\cos(sx)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

其中$A_i(s)$, $B_i(s)$, $C_k(s)$, $D_k(s)$是未知函数，$i=1,2,3,4$; $k=1,2$;

$$p_1=-\beta_1-\sqrt{s^2+\beta_1^2},\quad p_2=-\beta_1+\sqrt{s^2+\beta_1^2},$$
$$\lambda_1=-\beta_2-\sqrt{s^2+\beta_2^2},\quad \lambda_2=-\beta_2+\sqrt{s^2+\beta_2^2}.$$

又由本构方程(3)和(4)得到应力$\tau_{yz}^{(i)}(x,y)$, $i=1,2,3,4$，和电位移$D_y^{(i)}(x,y)$, $i=1,2,3,4$，的形式解，如

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^{(1)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{2\beta_1y}\int_0^\infty&\left[\mu(p_1A_1(s)\mathrm{e}^{p_1y}+p_2B_1(s)\mathrm{e}^{p_2y})\right.\\&\left.+e_{150}(p_1C_1(s)\mathrm{e}^{p_1y}+p_2D_1(s)\mathrm{e}^{p_2y})\right]\cos(sx)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{13}$$

$$D_y^{(1)}(x,y)=-\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{2\beta_1y}\int_0^\infty\varepsilon_{110}\left[p_1C_1(s)\mathrm{e}^{p_1y}+p_2D_1(s)\mathrm{e}^{p_2y}\right]\cos(sx)\mathrm{d}s, \tag{14}$$

其中$\mu=c_{440}+\frac{e_{150}^2}{\varepsilon_{110}}$。

4　对偶积分方程的建立

取裂纹上下表面的位移差和电势差为

$$\overline{f}(x)=w_1(x,0^+)-w_2(x,0^-),\quad \overline{g}(x)=\phi_1(x,0^+)-\phi_2(x,0^-). \tag{15}$$

将位移，电势的形式解(10),(11)等代入方程(15)，并经Fourier余弦变换，可以得到

$$\begin{aligned}&\overline{f}(s)=A_1(s)+B_1(s)-A_2(s)-B_2(s),\\&\overline{g}(s)=\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}\overline{f}(s)+C_1(s)+D_1(s)-C_2(s)-D_2(s)=0,\end{aligned} \tag{16}$$

应用边界条件(7)-(9)，经过Fourier余弦变换，从位移，电势的形式解(10),(11)等和应力，电位移的形式解(13),(14)等可以得到到一组关于$A_k(s)$, $B_k(s)$, $C_k(s)$, $D_k(s)$的方程，并与方程(16)联立可以得到

$$A_1(s)=q_1(s)q(s)\overline{f}(s),\quad A_2(s)=q_2(s)q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{17}$$

$$A_3(s)=\left[q_1(s)\mathrm{e}^{(p_1+s)h_1}+\mathrm{e}^{(p_2+s)h_1}\right]q(s)\overline{f}(s), \tag{18}$$

$$A_4(s)=\left[q_2(s)\mathrm{e}^{(s-\lambda_1)h_2}+\mathrm{e}^{(s-\lambda_2)h_2}\right]q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{19}$$

$$B_1(s)=q(s)\overline{f}(s),\quad B_2(s)=q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{20}$$

$$B_3(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}\left[q_1(s)\mathrm{e}^{(p_1+s)h_1}+\mathrm{e}^{(p_2+s)h_1}\right]q(s)\overline{f}(s), \tag{21}$$

$$B_4(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}\left[q_2(s)\mathrm{e}^{(s-\lambda_1)h_2}+\mathrm{e}^{(s-\lambda_2)h_2}\right]q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{22}$$

$$C_1(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}q_1(s)q(s)\overline{f}(s),\quad C_2(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}q_2(s)q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{23}$$

$$D_1(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}q(s)\overline{f}(s),\quad D_2(s)=-\frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}}q_3(s)q(s)\overline{f}(s), \tag{24}$$

其中$q_i(s)$, $i=1,2,3$，均是已知函数，分别为

$$q_1(s)=-\frac{p_2(s)+s}{p_1(s)+s}\mathrm{e}^{(p_2-p_1)h_1},\quad q_2(s)=\frac{s-\lambda_2(s)}{\lambda_1(s)-s}\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)h_2},\quad q_3(s)=\frac{p_1(s)q_1(s)+p_2(s)}{\lambda_1(s)q_2(s)+\lambda_2(s)}, \tag{25}$$

$$q(s)=1/\left[q_1(s)+1-q_2(s)q_3(s)-q_3(s)\right]. \tag{26}$$

由裂纹面处受反平面剪切力，上下表面应力相等，得对偶积分方程

$$\begin{cases}\int_0^\infty s\alpha(s)\overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s=-\dfrac{\pi\tau_0}{2c_{440}}, & c\leqslant x\leqslant a,\\ \int_0^\infty \overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s=0, & x>a,\quad 0<x<c,\end{cases} \tag{27}$$

其中$\alpha(s)$是已知函数，且

$$\alpha(s)=-\frac{1}{2}+\beta(s)=\frac{[p_1(s)q_1(s)+p_2(s)]q(s)}{s},\quad \lim_{s\to\infty}\alpha(s)=-\frac{1}{2}. \tag{28}$$

通过简单分式变换$x=x^*+\frac{a+c}{2}$, $b=\frac{a-c}{2}$为方便略去*后方程(27)变为

$$\begin{cases}\int_0^\infty s\alpha(s)\overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s=-\dfrac{\pi\tau_0}{2c_{440}}, & |x|\leq b,\\ \int_0^\infty \overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s=0, & |x|>b.\end{cases} \tag{29}$$

对于对偶积分方程(29)，我们采用Copson[11,12]方法求解，分情况进行讨论。

情况1 当$x>0$时，引入函数$\varphi(\xi)$，使

$$\overline{f}(s)=\int_0^b \xi\varphi(\xi)J_0(s\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{30}$$

其中 $J_0(\ )$ 为第一类0阶Bessel函数。将式(30)代入(29)，则第二个方程已经自动满足，要使第一个方程也成立，则 $\phi(\xi)$ 必须由下面的第二类Fredholm积分方程控制，即

$$\varphi(\xi)+\int_0^b K(\xi,\eta)\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta=-\frac{\pi\tau_0}{2c_{440}},\quad 0\leqslant x\leqslant b, \tag{31}$$

其中的核函数 $K(\xi,\eta)$ 为

$$K(\xi,\eta)=\eta\int_0^\infty s[\alpha(s)-1]J_0(s\eta)J_0(s\xi)\mathrm{d}s. \tag{32}$$

为了便于数值求解，再次引入下面的无量纲变量

$$s=\frac{S}{b},\quad \xi=b\,\Omega,\quad \eta=b\,\Gamma,\quad x=Xb, \tag{33}$$

$$\varphi(\xi)=-\frac{\pi\tau_0}{2c_{440}}\frac{\Psi(\Omega)}{\sqrt{\Omega}},\quad \varphi(\eta)=-\frac{\pi\tau_0}{2c_{440}}\frac{\Psi(\Gamma)}{\sqrt{\Gamma}}, \tag{34}$$

将式(33),(34)，代入方程(31),(32)，则各项分别标准化为

$$\overline{f}(S)=-\frac{\pi\tau_0 b^2}{2c_{440}}\int_0^1\sqrt{\Omega}\Psi(\Omega)J_0(S\Omega)\mathrm{d}\Omega, \tag{35}$$

$$\Psi(\Omega)+\int_0^1 L(\Omega,\Gamma)\Psi(\Gamma)\mathrm{d}\Gamma=\sqrt{\Omega}, \tag{36}$$

其中

$$L(\Omega,\Gamma)=\sqrt{\Omega\Gamma}\int_0^\infty S\Big[\alpha\Big(\frac{S}{b}\Big)-1\Big]J_0(S\Gamma)J_0(S\Omega)\mathrm{d}S, \tag{37}$$

$$\alpha\Big(\frac{s}{b}\Big)=-\frac{1}{2}+\beta\Big(\frac{s}{b}\Big)=\frac{[p_1(\frac{s}{b})q_1(\frac{s}{b})+p_2(\frac{s}{b})]q(\frac{s}{b})}{\frac{s}{b}}. \tag{38}$$

情况2　对于求解 $x<0$ 的情况与情况1中的做法一致，故此处省略。

5　裂纹尖端电弹性奇异场

对于断裂力学来说，我们感兴趣的是裂纹尖端附近的应力，应力强度因子，电位移以及电位移强度因子。因此沿着裂纹面的应力 τ_{yz} 和电位移 D_y，当 $X>1$ 时可表示为

$$\begin{aligned}\tau_{yz}(x,0)&=c_{440}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s\alpha(s)\overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\tau_0\Psi(1)\int_0^\infty J_1(S)\cos(SX)\mathrm{d}S+\cdots,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}D_y(x,0)&=\frac{2e_{150}}{\pi}\int_0^\infty s\alpha(s)\overline{f}(s)\cos(sx)\mathrm{d}s\\&=\frac{e_{150}}{2c_{440}}\tau_0\Psi(1)\int_0^\infty J_1(S)\cos(SX)\mathrm{d}S+\cdots,\end{aligned} \tag{40}$$

当 $X<-1$ 时有类似表达式，这里 $J_1(..)$ 是第一类一阶的 Bessel 函数，$\Psi(1)$, $\Psi(-1)$ 分别为 $\Psi(\Omega)$ 在裂纹左右尖端 $\Omega=\pm1$ 处的值。由于方程 (39), (40) 等中的积分在 $x=\pm b$ 处是有界的，因此，应力和电位移的奇异性只由包含 $\Psi(1)$, $\Psi(-1)$ 的项控制。记左右两端应力强度因子分别为 K_L^τ 和 K_R^τ，电位移强度因子 K_L^D 和 K_R^D，按通常应力强度因子的定义可得

$$K_L^\tau=\lim_{x\to c^-}\sqrt{2\pi(c-x)}\tau_{yz}(x,0),\quad K_R^\tau=\lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x-a)}\tau_{yz}(x,0),\tag{41}$$

$$K_L^D=\lim_{x\to c^-}\sqrt{2\pi(c-x)}D_y(x,0),\quad K_R^D=\lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x-a)}D_y(x,0),\tag{42}$$

则它们可分别表示为

$$K_L^\tau=-\frac{1}{2}\sqrt{\pi b}\,i\tau_0\Psi(-1),\quad K_R^\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\pi b}\tau_0\Psi(1),\tag{43}$$

$$K_L^D=-\frac{e_{150}}{2c_{440}}\sqrt{\pi b}\,i\tau_0\Psi(-1)=\frac{e_{150}}{c_{440}}K_L^\tau,\quad K_R^D=\frac{e_{150}}{2c_{440}}\sqrt{\pi b}\tau_0\Psi(-1)=\frac{e_{150}}{c_{440}}K_R^\tau,\tag{44}$$

其中 $\Psi(1)$ 与 $\Psi(-1)$ 分别为 $\Psi(\Omega)$ 在裂纹尖端 $\Omega=\pm1$ 的值。标准化应力强度因子

$$K_L^{\tau*}=\frac{K_L^\tau}{\sqrt{\pi b}\tau_0}=-\frac{1}{2}i\Psi(-1),\quad K_R^{\tau*}=\frac{K_L^\tau}{\sqrt{\pi b}\tau_0}=\frac{1}{2}\Psi(1).\tag{45}$$

标准化电位移强度因子

$$K_L^{D*}=\frac{K_L^D}{\sqrt{\pi b}D_0}=-\frac{e_{150}}{2c_{440}}\frac{\tau_0}{D_0}i\Psi(-1),\quad K_R^{D*}=\frac{K_L^D}{\sqrt{\pi b}D_0}=\frac{e_{150}}{2c_{440}}\frac{\tau_0}{D_0}\Psi(1),\tag{46}$$

由式 (43), (44)，可以看出，当 $\Omega\to\pm1$ 时，即无限接近裂纹尖端时，无限长功能梯度压电材料界面共线双裂纹尖端附近的应力，电位移都具有 $\frac{1}{2}$ 阶的奇异性。

6 数值算例与结论

假定 $y=0$ 平面处的材料为压电陶瓷 PZT-5H，其材料常数分别为 $c_{44}=3.53\times10^{10}\,\mathrm{Nm^{-2}}$, $e_{15}=17.0\,\mathrm{Cm^{-2}}$, $\varepsilon_{11}=150.4\times10^{-10}\,\mathrm{C/Vm}$，假定应力载荷 $\tau_0=1.2\times10^6\,\mathrm{N/m^2}$ 及电位移载荷 $D_0=0.01\,\mathrm{C/m^2}$。由于电位移强度因子与应力强度因子存在线性关系，所以我们只给出应力强度因子随材料的几何尺寸和材料的非均匀参数的变化情况，有关结果可用图 2 至图 5 表示。

7 结论

分析图 2 至图 5，我们可以得到如下结论：

1) 应力强度因子与裂纹间距，材料非均匀参数，材料几何尺寸有关，但与材料本身的常数无关。

2) 应力强度因子 K_3 随着裂纹半长度 b 的增大而减小。

3) 应力强度因子 K_3 随着上层功能梯度压电带宽度 h_1 的变大而减小，逐步趋于一个常值；而随着下层功能梯度压电带宽度 h_2 的增大而增大，逐步趋于一个常值；因此适度控制材料宽度可以减小应力强度因子。

4) 应力强度因子随着材料的非均匀参数 β_1 的变大而逐渐变大，而随着 β_2 的变大而减小，因此调节材料的非均匀参数对应力强度因子的影响也是显著的。

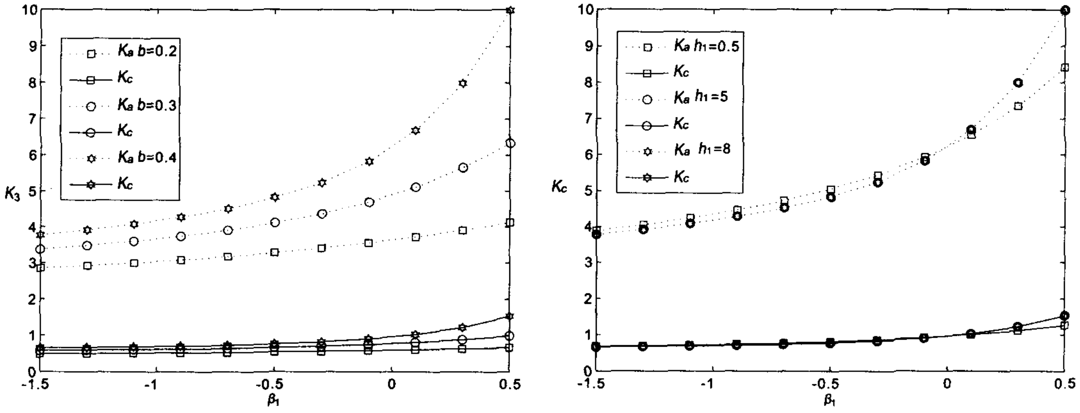

图 2: 标准化应力强度因子 K_3 随 β_1 (b 不同) 和随 β_1 (h_1 不同) 的变化情况

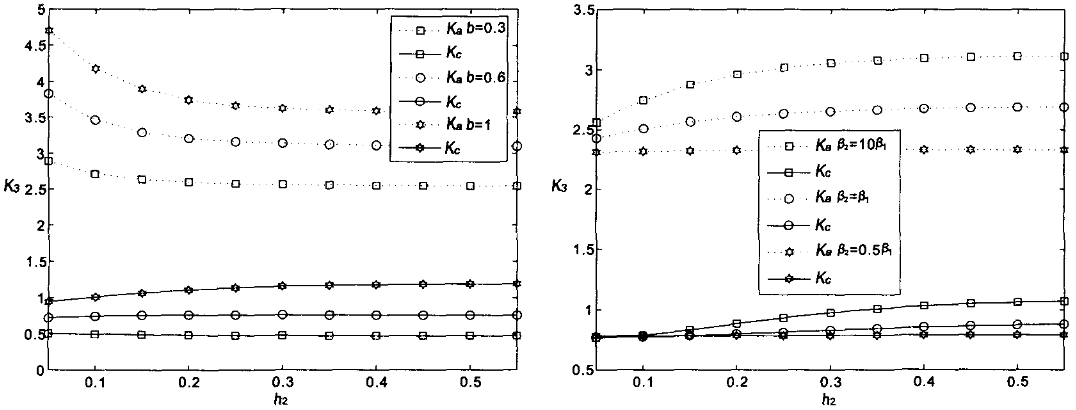

图 3: 标准化应力强度因子 K_3 随 h_2 (b 不同) 和随 h_2 (β_2 不同) 的变化情况

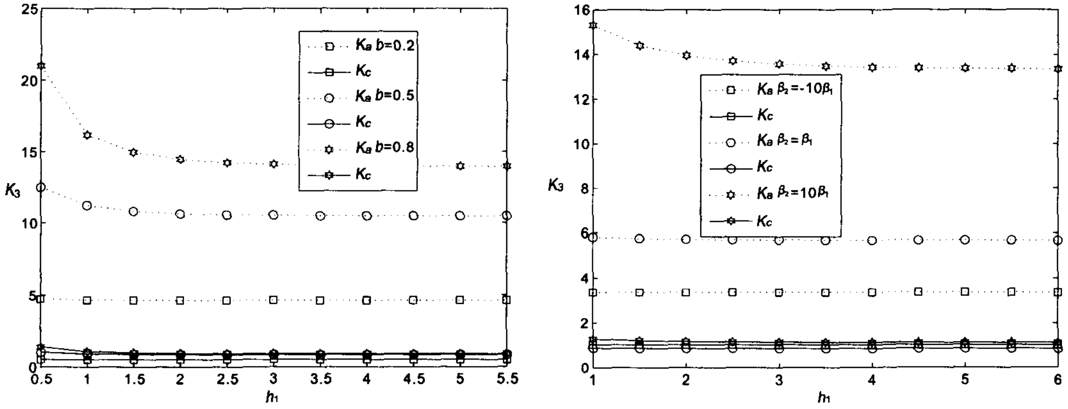

图 4: 标准化应力强度因子 K_3 随 h_1 (b 不同) 和随 h_1 (β_2 不同) 的变化情况

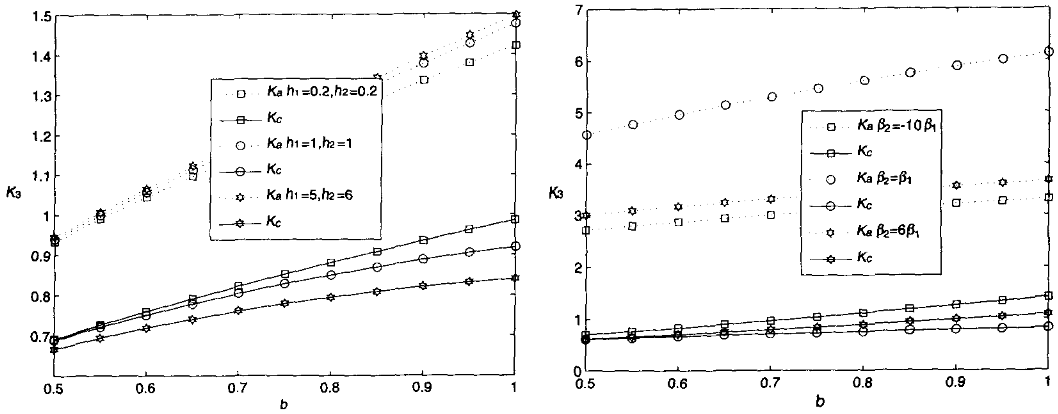

图 5: 标准化应力强度因子 K_3 随 $b\,(h_1,h_2$ 不同) 和随 $b\,(\beta_2$ 不同) 的变化情况

参考文献:

[1] Li X, Wang W S. Antiplane problem of periodic cracks in piezoelectric medium[J]. Complex Variables, 2005, 50(7-11): 611-620

[2] 汪文帅，李星. 压电材料中渗透性周期共线反平面裂纹问题[J]. 工程数学学报，2007, 24(2): 209-214
Wang W S, Li X. Anti-plane probelms of periodic permeable cracks in piezoelectric medium[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(2): 209-214

[3] 周振功，王彪. 压电材料中两个非对称平行裂纹的基本解[J]. 应用数学和力学，2007, 28(4): 379-390
Zhou Z G, Wang B. Basic solution of two parallel non-symmetric permeable cracks in piezoelectric materials[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(4): 379-390

[4] Ding S H, Li X. The periodic crack problem in bonded piezoelectric materials[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2007, 20(2): 171-179

[5] Li X F, Fan T Y, Wu X F. A moving mode-III crack at the interface between two dissimilar piezoelectric materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2000, 38: 1219-1234

[6] Takagi K, *et al.* Design and fabrication of functionally graded PZT/Pt piezoelectric bimorph actuator[J]. Science and Technology of Advanced Materials, 2002, 3: 217-224

[7] 李星，郭丽芳. 功能梯度压电压磁材料粘结的III型裂纹问题[J]. 力学学报，2007, 39(6): 760-766
Li X, Guo L F. Mode III crack in two bonded functionally graded mageto-electro-elastic materials[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(6): 760-766

[8] Ding S H, Li X. An anti-plane shear crack in bonded functionally graded piezoelectric materials under electromechanical loading[J]. Computational Materials Science, 2008, 43: 337-344

[9] Zhou Z G, Wang B, Sun Y G. Two collinear cracks in megneto-electro-elastic composites[J]. International Journal of Engineering Science, 2004, 42: 1155-1167

[10] Zhou Z G, Wu L Z, Wang B. The dynamic behavior of two collinear interface cracks in megneto-electro-elastic materials[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2005, 24: 253-262

[11] Copson E T. On certain dual integral equations[J]. Proc Glasgow Math Assoc, 1961, 5: 19-24

[12] 李星. 积分方程[M]. 北京：科学出版社，2008
Li X. Integral Equation[M]. Beijing: Science Press, 2008

The Anti-plane Collinear Cracks Problem of Functionally Graded Piezoelectric Strips Bonded to Homogeneous Piezoelectric Media

ZHOU Xiao-ling, LI Xing

(School of Mathematics and Computer Sciences, Ningxia University, Yinchuan 750021)

Abstract: By using the integral equation method, we investigate the anti-plane problem of two collinear cracks between two different functionally graded piezoelectric strips, sandwiched by two homogeneous piezoelectric media under shear load. By using the Fourier cosine transformation, the considered problem could be reduced to a pair of dual integral equations which are numerically solved by the Copson method under the permeable boundary conditions. The expressions for the stress intensity factor and the electric displacement intensity factor are obtained. Numerical examples show that the effects of the length of crack and material gradient parameter, etc.

Keywords: functionally graded piezoelectric strip; permeable crack; Fourier cosine transform; Copson method; dual integral equation; stress intensity factor

Received: 18 Feb 2008. **Accepted:** 22 Oct 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10962008); the State Key Development Program of Basic Research of China (2008CB617613).

† **Corresponding author:** X. Li. E-mail address: li_ x@nxu.edu.cn